Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I
Blatt 7
Abgabe: 18.01.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Sei $\mathbb{K}[T]_{\leq D}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens D mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{K}[T]_{\leq 2} & \to & \mathbb{K}[T]_{\leq 3} \\ & P & \mapsto & T \cdot \frac{\partial P}{\partial T} - 2P + 2P(0) \end{array}$$

wohldefiniert und linear ist.

(b) Gib die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basen $\{1, T, T^2\}$ von $\mathbb{K}[T]_{\leq 2}$ und $\{1, T, T^2, T^3\}$ von $\mathbb{K}[T]_{\leq 3}$ an.

(c) Was ist der Rang von F?

(d) Gib eine Basis des Kernes von F an.

(e) Gib eine Basis des Quotientenraumes $\mathbb{K}[T]_{\leq 2}/\mathrm{Ker}(F)$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachte die Ebene W gegeben durch $x-y+z=0$, sowie die Gerade U, welche sowohl den Punkt $(1,1,0)$ als auch den Nullvektor enthält.

(a) Zeige, dass es eine wohldefinierte (nicht-triviale) lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3/U \to \mathbb{R}^3/W$ gibt.

(b) Ist ψ ein Epimorphismus? Ist ψ ein Isomorphismus?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Betrachte im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 = (1,-3,3) \qquad v_2 = (1,1,0) \qquad v_3 = (1,-4,7)$$

(a) Zeige, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.

(b) Mit Hilfe der Übergangsmatrix von der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ nach der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$, gib die Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y-z, 3z-x+2y) \end{array}$$

bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sowohl im Definitions- als auch im Bildbereich) an.

(c) Ist A regulär?

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.